پروژه هفدهم:

حل تحلیلی و عددی مسائل بهینه‌سازی دینامیکی پیوسته

۱- شاخص عملکرد $\int_{t_0}^{t_f}(u^2-x)dt$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که کمینهٔ این شاخص تحت معادله حالت(قید دیفرانسیلی) $\dot{x}=u$ و شرایط مرزی $t_0=0\ ,\ x_0=0\ ,\ t_f=1$ به صورت زیر است[1]:

$$u(t)=-\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\quad ,\quad x(t)=-\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}\ ,\ J_{\min}=-\frac{1}{12}=0.083$$

ب) حل عددی این مسئله را با استفاده از دستور FMINCON در نرم‌افزار Matlab بدست آورده و پاسخ حل عددی را برای $u(t),x(t),\ J_{\min}$ با حل تحلیلی مقایسه نمائید.

۲- شاخص عملکرد زیر را در نظر بگیرید[2]:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2+u^2)dt$$

معادله حالت یا قیود دیفرانسیلی عبارتند از:

$$\dot{x}=-x+\sqrt{3}u$$

الف) در صورتی که $x(0)=2$ باشد نشان دهید که:

$$x^*=\frac{2(e^{2t}+3e^4e^{-2t})}{3e^4+1}\quad ,\quad u^*=\frac{2\sqrt{3}(e^{2t}-e^4e^{-2t})}{3e^4+1}$$

ب) حل کمینهٔ این مسئله را بصورت عددی بدست آورده و با حل تحلیلی فوق (*J*=0.65958) مقایسه کنید.

پاسخ تحلیلی:

$$H=\frac{1}{2}(x^2+u^2)+\lambda(-x+\sqrt{3}u)$$
$$\dot{\lambda}=-\frac{\delta H}{\delta x}=-x+\lambda$$
$$H_u=0\Rightarrow u=-\sqrt{3}u$$
$$\lambda(T)=\phi_x^T=0\Rightarrow u(1)=0$$

---

1 Hull, David. G., *Optimal Control Theory for Applications*, Springer, 2003. Problem 9.5, Page 156

2 . پینچ، ای. آر، کنترل بهینه و حساب تغییرات - مترجم فراهی، محمدهادی – مشهد نشر بنفشه ۱۳۸۵ ص ۱۷۸

که با ساده سازی معادلات بالا داریم:

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{3}x + u, \mathrm{u}(1) = 0 \\ \dot{x} = -x + \sqrt{3}u, x(0) = 2 \end{cases}$$

و با حل آن با کد زیر داریم:

```
inits='x(0)=2,u(1)=0';
[x,u]=dsolve('Dx=-x+(sqrt(3))*u','Du=(sqrt(3))*x+u',inits)
```

که جواب ها:

$$x^* = \frac{2(e^{2t} + 3e^4 e^{-2t})}{3e^4 + 1} \quad , \quad u^* = \frac{2\sqrt{3}(e^{2t} - e^4 e^{-2t})}{3e^4 + 1}$$

پاسخ عددی:

کد ایندکس:

```
function [L]=index(x)
global N dt;
L=0.5*dt*((x(1:N+1,1)'*x(1:N+1,1))+(x(1:N,3)'*x(1:N,3)));
end
```

کد قیدها:

```
function [c,ceq]=constraints(x)
global N dt;
c=[];
ceq=zeros(2*N+3,1);
for k=1:N
    ceq(k)=x(k+1,1)-x(k,1)-dt*(-x(k,1)+sqrt(3)*x(k,3));
    ceq(k+N)=x(k+1,3)-x(k,3)-dt*(sqrt(3)*x(k,1)+ x(k,3))  ;
end
ceq(2*N+1)=x(1,1)-2;
ceq(2*N+2)=x(N-3,3)-0;
end
```

کد برنامه اصلی:

```
clc; clear all;
```

```
global N dt;
N=400; tf=1; dt = tf/N;
x0=zeros(N+2,3); x0(N+2,1)=0;
[x,Jmin]=fmincon(@index,x0,[],[],[],[],[],[],@constraints);
N
Jmin
```

که در حل عددی مقدار مینیمم شاخص عملکرد برابر است با ۰,۶۵۲۳

و در حل تحلیلی مقدار شاخص عملکرد برابر است با ۰,۶۵۹۵